El Modelo de Crecimiento de Solow

Parte I

Cómo el ahorro y el stock de capital afectan el crecimiento económico.

Proemio

El modelo de Solow, tambien conocido como modelo de crecimiento neoclasico o modelo de crecimiento exogeno, explica el crecimiento en el largo plazo.

Proemio

Aporta una visión dinámica de cómo, con el tiempo, el ahorro, el stock de capital, la depreciacion, el crecimiento de la población y el cambio tecnológico determinan el avance de la economía.

Proemio

- El modelo refiere a una economia no intervenida y cerrada (no G, no Xn)
- Hay solo dos grupos de agentes economicos: las familias y las empresas ($Y = C + I$)
- El ahorro, que efectuan tipicamente las familias, es captado por las empresas, quienes lo dedican integramente a la inversion
- El cambio del stock de capital ($\triangle K$) depende de la inversion y de la depreciacion.

Las variables del Modelo

Las variables endógenas del modelo son y, k y c (producto, capital y consumo por trabajador).

- **Las variables exógenas son s (tasa de ahorro), K (stock inicial de capital) y δ (tasa de depreciacion).**
- **En el modelo de Solow el equilibrio de largo plazo ocurre en el punto en donde la inversion por trabajador i y la depreciacion del capital δk se igualan e y, k y c permanecen constantes.**

Construyendo el Modelo

- Partimos de la función de producción: $Y = f\,(K,L)$
- Asumimos rendimientos constantes: $zY = f\,(zK,zL)$
  - K = capital, L = Numero de Trabajadores, z = constante
- Reemplazando $z = 1/L$
- Creamos la función del producto por trabajador………..

$$Y/L = f\,(K/L,1) \;\ldots\; y = f(k)$$

que indica que **el producto por trabajador (rendimiento) depende del capital por trabajador**.

Construyendo el Modelo

- Trazamos producto por trabajador vs. capital por trabajador

  Obtenemos una parabolica

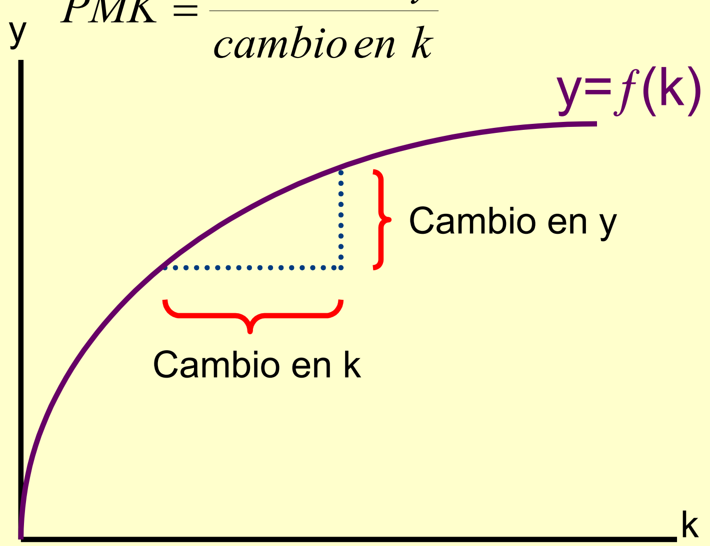
- La pendiente de esta función es el producto marginal del capital por trabajador.

  PMK = △ **y / △ k**

- Indica el cambio en el producto por trabajador que resulta del aumento del capital por trabajador en uno.

- PMK no es constante sino decreciente.

$$PMK = \frac{cambio\ en\ y}{cambio\ en\ k}$$



Construyendo el Modelo

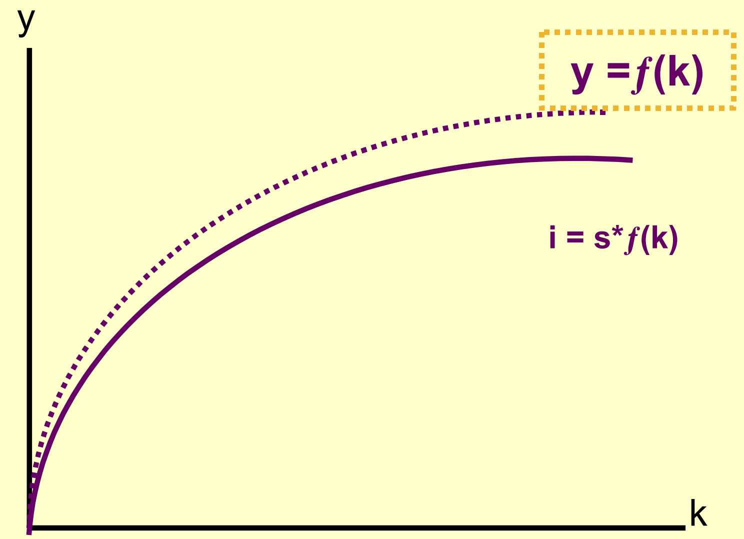
Trazamos inversion por trabajador vs. capital por trabajador

- La inversion por trabajador es:

  i = s*y …. o i = s*ƒ(k)

- El producto por trabajador es mayor que la inversion por trabajador porque solo parte de y se dedica a i.
- y = c + i
- El consumo por trabajador c es la diferencia entre y e I

  c = y - i



Construyendo el Modelo

- El producto por trabajador $y = c + i$ (1)
- Si la tasa de ahorro es s, la tasa de consumo es (1-s) y la función del consumo por trabajador es $c = (1-s)*y$
- Si remplazamos en (1) $y = (1-s)*y + i$
- Y de alli ………….. $i = s*y$
- **La inversión por trabajador** es igual a la tasa de ahorro por el producto por trabajador.
- **La tasa de ahorro** es la porcion del producto que se dedica a la inversion. (la tasa de inversion es igual a la de tasa de ahorro)

El Estado estacionario

El estado estacionario es el estado de equilibrio de largo plazo de la economia.

Ocurre en el punto en donde i y δk se igualan. En ese punto y, k y c permanecen constantes y $\triangle$ k = 0.

Equilibrio en el Estado Estacionario

- Como $y = f(k)$, sustituyendo..

la función inversión por trabajador $i = s*y$

se convierte en $i = s*f(k)$

- La depreciacion del capital por trabajador δk es igual

a la tasa de depreciación δ por el capital por trabajador k

- El cambio en el stock del capital por trabajador… $\triangle k = i - \delta k$

depende de la inversion por trabajador y

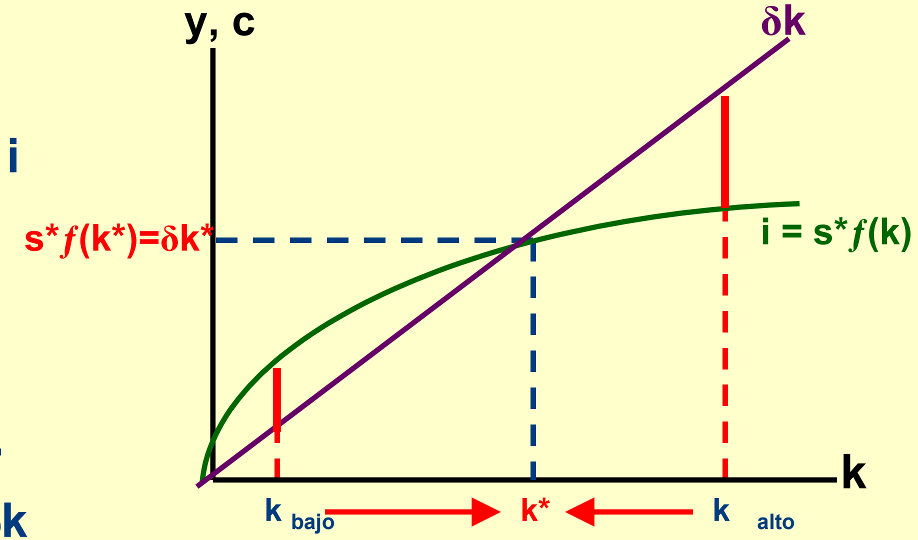
de la depreciacion del capital

- sustituyendo … $\triangle k = s*f(k) - \delta k$

Efecto del stock inicial de capital

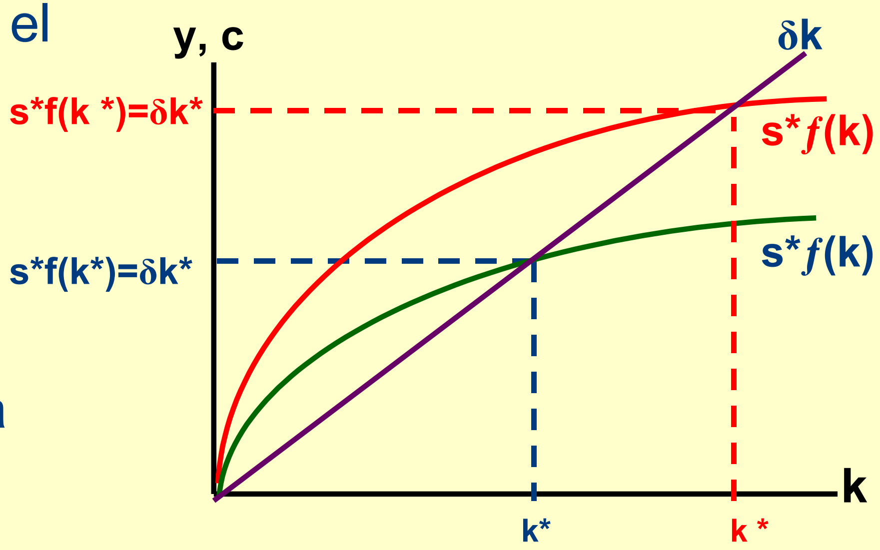
- Dadas las tasas de inversion y depreciacion, si el k inicial es alto, k* sera menor porque la depreciacion excedera la inversion. $\delta k > i$ .. $\triangle k$ negativo
- Si el k inicial es bajo, k* sera mayor porque la inversion excedera la depreciacion. $\delta k < i$ $\triangle k$ positivo
- En donde $i = s^* f(k) = \delta k$

  $\triangle k = s^* f(k) - \delta k = 0$
- k* = k del estado estacionario.
- En el estado estacionario $i = \delta k$ y y, k y c permanecen constantes



Cambiando la tasa de ahorro

- El estado estacionario está en el punto en dónde $s^*f(k) = \delta k$
- Si la tasa de ahorro aumenta, la pendiente de la función de inversión tambien aumenta.
- La función cambia hacia arriba

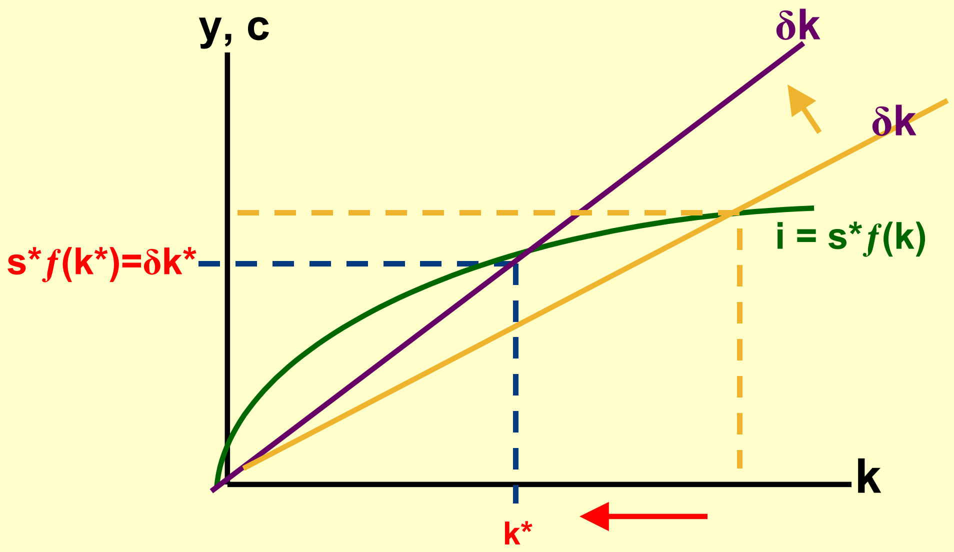


- Esto aumenta el nivel del capital, del producto y del consumo por trabajador del estado estacionario.

- Si la tasa de ahorro disminuye
- La función cambia hacia abajo
- Esto disminuye el nivel del capital, del producto y del consumo por trabajador del estado estacionario.

Efecto de la tasa de depreciacion

- Si la tasa δ aumenta, k disminuira porque la depreciacion excedera la inversion.
- δk > i .. △ k negativo



Ejemplo Numérico

- Dividiendo por L la función de produccion de Cobb-Douglas …….$Y=K^{1/2}L^{1/2}$
- Obtenemos la funcion producto por trabajador …. $Y/L=(K/L)^{1/2}$ …o… $y = k^{1/2}$
- $\triangle k$ cambia hasta que $\triangle k = s^*y - \delta k = 0$

  es decir hasta que $i = s^*y = \delta k$

Ejemplo Numérico

- **Dados s, δ y k inicial, calculamos los valores que adoptan con el tiempo las variables en su trayecto al estado estacionario.**
- **Asumimos $s = 0.4$, $\delta = 0.09$ y $k_1 = 4$.**
- **En el equilibrio $s*y = \delta k$.**
- **$0.4*k^{1/2} = 0.09*k \ldots 4.444 = k^{1/2}$**
- **$\therefore k* = 19.749$.**

Ejemplo Numérico

- El algoritmo para cada período es el siguiente:
  - En el periodo 1 $y = k^{1/2}$ …. $y = 4^{1/2} = 2$
  - Como $c = (1-s)y$ y $s = 0.4$, $c = 0.6y = 1.2$
  - Como $i = s*y$ …. $i = 0.4*2 = 0.8$
  - $\delta k = 0.09*4 = 0.36$
  - $\triangle k = s*y - \delta k$ …. $\triangle k = 0.8 - 0.36 = 0.44$
  - Así, en el próximo período, $k_2 = k_1 + \triangle k$
  - $k_2 = 4 + 0.44 = 4.44$.

Ejemplo Numérico

Período	k	y	c	i	δk	Δk
1	4	2	1.2	.8	.36	.44
2	4.44	2.107...	1.264...	.842…	.399…	.443…
.	.	.	.	.	.	.
12	8.344...	2.889...	1.733...	1.155...	.751…	.404…
.	.	.	.	.	.	.
∞	19.749.	4.44…	2.667...	1.777...	1.777...	0.000...

Conclusión

- El modelo de Crecimiento de Solow es un modelo dinámico que explica cómo las variables exógenas ahorro, stock inicial del capital y tasa de depreciación afectan a las variables endógenas: producto, capital y consumo por trabajador.
- También como la inversion y la depreciación afectan la acumulacion de capital, y el efecto que esto tiene en la determinacion de los valores de las variables en su trayectoria hacia el equilibrio del estado estacionario.